

Suite numérique

Lever une indétermination

I. Factoriser le terme de plus haut degré

Situation

Pour déterminer la limite d'une suite dont le terme général s'exprime sous la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction polynôme ou une fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes), on peut rencontrer une des deux formes indéterminées suivantes : $\frac{\infty}{\infty}$ et $+\infty - \infty$. On utilise alors la factorisation par le terme de plus haut degré pour lever l'indétermination.

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^3 + n - 1}{3n^3 + n^2 + 2}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Etape 1 : Factoriser chaque polynôme

On factorise chaque polynôme par son terme de plus haut degré.

Application

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{n^3 + n - 1}{3n^3 + n^2 + 2}$$

soit :

$$u_n = \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{3n^3 \left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{2}{3n^3}\right)}$$

Etape 2 : Simplifier si nécessaire

Si le terme générale de la suite étudiée est un quotient de polynômes, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur en s'intéressant aux termes de plus haut degré par lesquels on vient de factoriser.

Application

En simplifiant numérateur et dénominateur on obtient, pour tout n :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 \left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{2}{3n^3} \right)}$$

Etape 3 : Déterminer la limite

On détermine la limite de la suite en utilisant les limites usuelles et les opérations des limites.

Application

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Donc par la somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right) = 1$$

De même :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3n} + \frac{2}{3n^3} \right) = 1$$

Finalement, par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

II. Utiliser la quantité conjuguée

Situation

Cette méthode s'emploie en particulier pour déterminer la limite d'une suite dont le terme général est défini comme somme ou différence de racine carrées.

Enoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Etape 1 : Multiplier et diviser par la quantité conjuguée

- Si l'expression est de type $(a - b)$, on la multiplie et divise par sa quantité conjuguée $(a + b)$.

- Si l'expression est de type $(a + b)$, on la multiplie et divise par sa quantité conjuguée $(a - b)$.

Application

Cette expression présente une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée. On obtient :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Etape 2 : Développer et réduire le numérateur et le dénominateur

On sait que pour tous réels a et b : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Application

On obtient :

$$u_n = \frac{n^2 + 1 - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Soit

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

:

Etape 3 : Déterminer la limite

Si l'indétermination est levée, on peut déterminer la limite à l'aide des limites usuelles et des règles d'opération. Sinon, il reste à factoriser par les termes de plus haut degré.

Application

Il n'y a plus d'indétermination. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{N} = +\infty$$

Par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$$

De même :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 1} = +\infty$$

Ainsi, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}) = +\infty$$

Finalement, par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

III. Utiliser les théorèmes de comparaison

Situation

Pour montrer qu'une suite tend vers l'infini, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - \sin(n^2)$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Étape 1 : Majorer ou minorer la suite

On essaie de minorer le terme général de la suite par celui d'une autre suite qui tend vers $+\infty$ ou de la majorer par le terme général d'une autre suite qui tend vers $-\infty$.

Application

Soit n un entier naturel, on a :

$$\sin(n^2) \leq 1$$

Soit :

$$-\sin(n^2) \geq -1$$

En ajoutant n à chaque membre de l'inégalité, on obtient :

$$n - \sin(n^2) \geq n - 1$$

On remarque que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$$

Étape 2 : Conclure sur la limite

- Si le terme général de la suite est minoré par celui d'une autre suite qui tend vers $+\infty$, alors la suite tend aussi vers $+\infty$.
- Si le terme général de la suite est majoré par celui d'une autre suite qui tend vers $-\infty$, alors la suite tend aussi vers $-\infty$.

Application

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n - \sin(n^2) \geq n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$$

On peut conclure, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

IV. Utiliser le théorème d'encadrement

Situation

Pour montrer qu'une suite tend vers une limite finie, on peut utiliser les théorèmes d'encadrement (théorème des gendarmes).

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Étape 1 : Déterminer un encadrement

On encadre l'expression dont on cherche la limite par celle de deux suites ayant la même limite.

Application

Soit n un entier naturel non nul, on a :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

En multipliant par l'inverse de n , qui est strictement positif, on obtient :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

On remarque que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

Étape 2 : Conclure sur la limite

On peut conclure grâce au théorème d'encadrement que l'expression admet pour limite celle commune aux deux suites encadrantes.

Application

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

On peut conclure, d'après le théorème d'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$