

Suite numérique

Modèles discret d'évolution

« Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la Terre. »

Archimède

Contenus

- Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes.
- Limite d'une suite géométrique de raison positive.
- Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.
- Suites arithmético-géométriques.

Capacités attendues

- Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.
- Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.
- Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.
- Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière ; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

Démonstration possible

- Limite des sommes des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1.

Exemple d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, calcul des termes successifs.
- Recherche de valeurs approchées de constantes mathématiques, par exemple π , $\ln 1$, $\sqrt{2}$.

I. Rappel : généralité sur les suites

A. Notion de suite

Définition 1

On appelle suite u de nombres réels toute fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. L'image par u d'un entier naturel n est un réel noté u_n , et se lit « u indice n ». On dit que u_n est le terme général de la suite u .

Remarque

Une suite peut être définie de plusieurs façons différentes :

- **au moyen d'une formule explicite** : u_n en fonction de n . (Exemple : la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 + 2n + 3$).
- **au moyen d'une relation de récurrence** : u_{n+1} en fonction de u_n . (Exemple : la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$).

B. Sens de variation d'une suite

Propriété 1

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite u est croissante sur $\mathbb{N}$.
- Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite u est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 1

Déterminer le sens de variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

C. Suites arithmétiques

Définition 2

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Propriété 2

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$. Alors pour tous entiers naturels n et p , on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Exercice 2

Démontrer la propriété précédente.

Exercice 3

Soit u la suite arithmétique de raison $r = 3$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_{10} = 2$.

Calculer u_{17} .

Propriété 3

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$.

Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.

Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.

Si $r = 0$, alors la suite u est constante.

Exercice 4

Démontrer la propriété précédente.

D. Somme des entiers de 1 à n

Propriété 4

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 5

Démontrer la propriété précédente.

Exercice 6

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

E. Suites géométriques

Définition 3

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que u est une suite géométrique de raison q si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Propriété 5

Soit u une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$. Alors pour tous entiers naturels n et p , on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exercice 7

Démontrer la propriété précédente.

Exercice 8

Soit u la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_6 = 5$.

Calculer u_{11} .

Propriété 6

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

- Si $u_0 > 0$
 - Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
 - Si $q = 1$, alors u est constante.
 - Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.
- Si $u_0 < 0$
 - Si $q > 1$, alors u est strictement décroissante.
 - Si $q = 1$, alors u est constante.
 - Si $0 < q < 1$, alors u est strictement croissante.
- Si $u_0 = 0$, alors la suite u est constante à zéro.

Exercice 9

Démontrer la propriété précédente.

F. Somme des puissances successives d'un réel

Propriété 7

Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel n , on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 10

Démontrer la propriété précédente.

Exercice 11

Calculer pour tout entier naturel n la somme $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$.

II. Suite arithmético-géométrique

Définition 4

Soient a et b deux réels. Une suite arithmético-géométrique est une suite u définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou quelques fois u_1) et par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Remarque

Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b .

Si $a = 0$, alors la suite (u_n) est une suite constante où tous les termes valent b .

Si $b = 0$, alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison a .

Exercice 12 : la forme explicite

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$ et $u_0 = 1$. Pour déterminer de cette suite, on procède trois étapes.

1. Déterminer la suite constante vérifiant la relation de récurrence de (u_n) .
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $v_n = u_n - 4$.
Montrer que cette suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire alors l'expression explicite de v_n , puis de u_n .

Propriété 8

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + b$.

Soit α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.

Alors la suite (v_n) , définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a .

Exercice 13

Démontrer la propriété précédente.

Remarque

Si $a = 1$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b et on connaît déjà sa formule explicite. De plus, dans le cas où $a = 1$, la propriété ci-dessus n'est pas applicable car l'équation $x = ax + b$ n'a pas de solution (puisque $x = ax + b \Leftrightarrow x = x + b \Leftrightarrow 0 = b$).

Exercice 14

Déterminer la formule explicite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

III. Limite finie ou infinie d'une suite

A. Limite finie : suite convergente

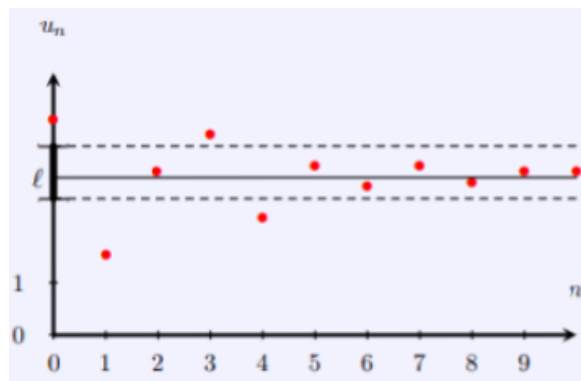
Définition 5 : Approche intuitive

Soit u une suite et l un réel.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite l si u_n est aussi proche de l que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.

On dit alors que la suite u converge vers l et que l est la limite de u , et on note :

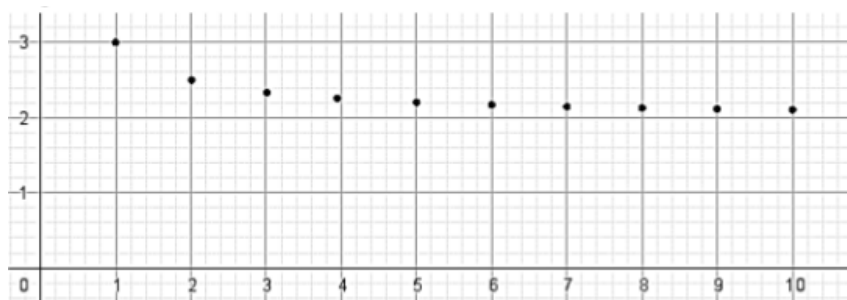
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

**Remarque**

- Lorsqu'elle existe, la limite l est unique.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 1

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ a pour limite 2.
Les termes de la suite se resserrent autour de 2 pour des valeurs de n de plus en plus grandes.



- Les suites de référence $n \mapsto \frac{1}{n}$, $n \mapsto \frac{1}{n^k}$ (avec k entier naturel non nul), $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

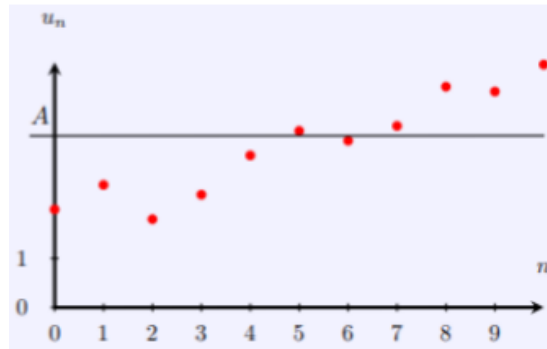
B. Limite infinie**Définition 6 : Approche intuitive**

Soit u une suite.

On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.

On dit alors que la suite u diverge vers $+\infty$ et que $+\infty$ est la limite de u , et on note :

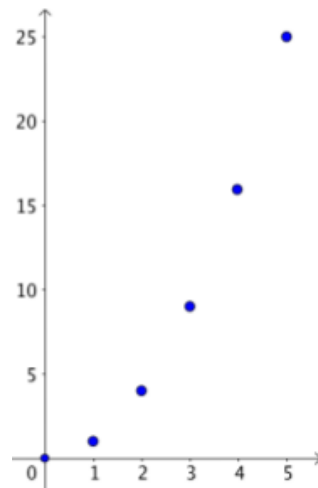
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**Remarque**

On définit de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2

- La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$.



- Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^k$ (k entier naturel non nul), $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1 . Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie.

IV. Opérations sur les limites

A. Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	F. l.*

* F.l. : Forme indéterminée. On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

B. Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	$l \neq 0$	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l'	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$l \times l'$	∞	∞	F. l.*

Remarque

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituels.

C. Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l	l	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	∞	$l' \neq 0$	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	∞	F. l.*

Remarque

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituels.

D. Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \neq 0$ ou ∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	0 (en gardant un signe constant à partir d'un certain rang)	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	∞	F. l.*

Exercice 15

Remplir les tableaux suivants.

1. Forme indéterminée $+\infty - \infty$:

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$
$2n + 1$	$-n$				
$n^2 + 1$	$-n^2$				
$n + \frac{1}{n}$	$-n$				

2. Forme indéterminée $+\infty \times 0$:

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$
n^2	$\frac{1}{n}$				
n	$-\frac{1}{n^2}$				
$5n^3$	$\frac{2}{n^3}$				

3. Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \div v_n$
n	$3n$				
$2n^2$	$-n$				
n	$2n^3$				

4. Forme indéterminée $\frac{0}{0}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \div v_n$
$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$				
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$				

Remarque

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ », « $0 - \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », mais ces écritures ne doivent **jamais** être utilisées dans une **rédaction** !

E. Limite d'une suite géométrique**Théorème 1**Soit q un réel strictement positif.Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers zéro.Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 16

1. Cas où $q > 1$.

- On pose $q = 1 + a$. Montrer par récurrence que $q^n \geq 1 + na$.
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

2. Cas où $0 < q < 1$.

- on pose : $p = \frac{1}{q}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = +\infty$.
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Remarque

- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 0$, alors la suite (q^n) converge vers zéro.

V. Limites et comparaison

A. Théorème de comparaison

Théorème 2

Soient u et v deux suites.

On suppose que pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang n_0 on a :
 $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + (-1)^n$.

- Justifier que la suite n'est pas monotone.
- Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

B. Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Théorème 3

Soit u , v et w trois suites telles que :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0 ,
- v et w convergent vers la même limite l ,

alors la suite u converge et sa limite est l .

Exercice 17

Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{2+3 \cos n}{n}.$$

C. Passage à la limite dans les inégalités

Théorème 4

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives l et l' et soit n_0 un entier naturel.

Si pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.