

Corrigé : Exercices sur les équations et fonctions du second degré

Première Spécialité Mathématiques

I. Forme canonique et variations

Exercice 1 : Exercice 1 : Passage à la forme canonique et sommet

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme canonique, puis donner les coordonnées du sommet S de la parabole ainsi que ses variations :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$

- **Forme canonique** : $f(x) = 2(x^2 - 6x) + 10 = 2((x - 3)^2 - 9) + 10 = 2(x - 3)^2 - 18 + 10 = 2(x - 3)^2 - 8$.
- **Sommet** : $S(3; -8)$.
- **Variations** : Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. f est décroissante sur $] -\infty; 3]$ puis croissante sur $[3; +\infty[$.

2. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

- **Forme canonique** : $g(x) = -(x^2 - 6x) - 5 = -((x - 3)^2 - 9) - 5 = -(x - 3)^2 + 9 - 5 = -(x - 3)^2 + 4$.
- **Sommet** : $S(3; 4)$.
- **Variations** : Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. g est croissante sur $] -\infty; 3]$ puis décroissante sur $[3; +\infty[$.

3. $h(x) = 3x^2 + 6x - 2$

- **Forme canonique** : $h(x) = 3(x^2 + 2x) - 2 = 3((x + 1)^2 - 1) - 2 = 3(x + 1)^2 - 3 - 2 = 3(x + 1)^2 - 5$.
- **Sommet** : $S(-1; -5)$.
- **Variations** : Comme $a = 3 > 0$, la parabole est tournée vers le haut. h est décroissante sur $] -\infty; -1]$ puis croissante sur $[-1; +\infty[$.

Exercice 2 : Exercice 2 : Recherche d'une fonction par son sommet

Déterminer l'expression sous forme développée de la fonction polynôme du second degré f dont la représentation graphique est une parabole de sommet $S(2; -5)$ et qui passe par le point $A(0; 3)$.

Puisque le sommet est $S(2; -5)$, la forme canonique de f est : $f(x) = a(x - 2)^2 - 5$ où $a \neq 0$.

La parabole passe par le point $A(0; 3)$, donc $f(0) = 3$:

$$a(0 - 2)^2 - 5 = 3 \iff 4a - 5 = 3 \iff 4a = 8 \iff a = 2$$

Ainsi, $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5 = 2(x^2 - 4x + 4) - 5 = 2x^2 - 8x + 8 - 5 = 2x^2 - 8x + 3$.

II. Résolution d'équations et factorisation

Exercice 3 : Exercice 3 : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en calculant le discriminant Δ :

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$a = 2, b = -5, c = -3.$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49.$ Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Ensemble des solutions : $S = \{-\frac{1}{2}; 3\}.$

2. $-3x^2 + 6x - 3 = 0$

$a = -3, b = 6, c = -3.$

$\Delta = 6^2 - 4(-3)(-3) = 36 - 36 = 0.$ Une racine double :

$$x_0 = \frac{-6}{2(-3)} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Ensemble des solutions : $S = \{1\}.$

3. $4x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 4, b = -2, c = 1.$

$\Delta = (-2)^2 - 4(4)(1) = 4 - 16 = -12.$ Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

Ensemble des solutions : $S = \emptyset.$

4. $x^2 - 7x + 10 = 0$

$a = 1, b = -7, c = 10.$

$\Delta = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9.$ Deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{7 - 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Ensemble des solutions : $S = \{2; 5\}.$

Exercice 4 : Exercice 4 : Factorisation de trinômes

Factoriser, lorsque cela est possible, les expressions suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $A(x) = 5x^2 + 13x - 6$

$\Delta = 13^2 - 4(5)(-6) = 169 + 120 = 289$ ($\sqrt{289} = 17$).

Racines : $x_1 = \frac{-13-17}{10} = -3$ et $x_2 = \frac{-13+17}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$

Factorisation : $A(x) = 5(x + 3) \left(x - \frac{2}{5}\right).$

2. $B(x) = -2x^2 + 12x - 18$

On peut factoriser par -2 : $B(x) = -2(x^2 - 6x + 9) = -2(x - 3)^2.$

3. $C(x) = x^2 - 3x + 7$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(7) = 9 - 28 = -19.$

Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}.$

III. Somme, produit et racines évidentes

Exercice 5 : Exercice 5 : Utilisation d'une racine évidente

On considère le trinôme $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$.

1. Démontrer que $x_1 = 3$ est une racine évidente de f .

$$f(3) = 3(3)^2 - 10(3) + 3 = 3(9) - 30 + 3 = 27 - 30 + 3 = 0.$$

Donc 3 est bien une racine évidente de f .

2. En utilisant le produit des racines $P = \frac{c}{a}$, déterminer la seconde racine x_2 de f .

On a $a = 3$ et $c = 3$, donc le produit des racines est $P = \frac{3}{3} = 1$.

Or $P = x_1 \times x_2$, donc $3 \times x_2 = 1 \iff x_2 = \frac{1}{3}$.

3. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 3)(3x - 1).$$

Exercice 6 : Exercice 6 : Somme et produit

Déterminer deux nombres réels a et b sachant que leur somme est $S = 12$ et leur produit est $P = 35$.

Les nombres a et b sont les solutions de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P = 0$, c'est-à-dire $X^2 - 12X + 35 = 0$.

Discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4(1)(35) = 144 - 140 = 4$.

Les solutions sont : $X_1 = \frac{12-2}{2} = 5$ et $X_2 = \frac{12+2}{2} = 7$.

Les deux nombres recherchés sont donc 5 et 7.

IV. Signe du trinôme et inéquations

Exercice 7 : Exercice 7 : Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en étudiant le signe du trinôme :

1. $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$

On étudie $P(x) = -2x^2 + 5x + 3$. $\Delta = 5^2 - 4(-2)(3) = 25 + 24 = 49$ ($\sqrt{49} = 7$).

Racines : $x_1 = \frac{-5-7}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$ et $x_2 = \frac{-5+7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Comme $a = -2 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

Ensemble des solutions : $S = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

2. $x^2 - 4x + 4 > 0$

On remarque que $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.

Un carré est toujours positif ou nul, et il s'annule en $x = 2$.

L'inéquation stricte $(x - 2)^2 > 0$ est donc vraie pour tout réel différent de 2.

Ensemble des solutions : $S = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

3. $3x^2 + x + 2 < 0$

$$\Delta = 1^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23.$$

Comme $\Delta < 0$ et $a = 3 > 0$, le trinôme est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'inéquation n'a donc aucune solution. $S = \emptyset$.

V. Problèmes et modélisation

Exercice 8 : Exercice 8 : Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = 2x - 1$.

1. Étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.

$$d(x) = (-x^2 + 4x + 3) - (2x - 1) = -x^2 + 4x + 3 - 2x + 1 = -x^2 + 2x + 4.$$

Calculons le discriminant de $d(x)$: $\Delta = 2^2 - 4(-1)(4) = 4 + 16 = 20$ ($\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$).

Racines : $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-2} = 1 + \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{-2} = 1 - \sqrt{5}$.

Comme $a = -1 < 0$, $d(x) > 0$ entre les racines et $d(x) < 0$ à l'extérieur.

2. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 - Sur $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$, $d(x) \geq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
 - Sur $] -\infty; 1 - \sqrt{5}] \cup [1 + \sqrt{5}; +\infty[$, $d(x) \leq 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
3. Préciser les coordonnées des éventuels points d'intersection de ces deux courbes.

Les points d'intersection correspondent aux racines de $d(x) = 0$:

$$x_A = 1 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_B = 1 + \sqrt{5}$$

En calculant les ordonnées avec $g(x)$:

$$g(1 - \sqrt{5}) = 2(1 - \sqrt{5}) - 1 = 1 - 2\sqrt{5}$$

$$g(1 + \sqrt{5}) = 2(1 + \sqrt{5}) - 1 = 1 + 2\sqrt{5}$$

Les points d'intersection sont $A(1 - \sqrt{5}; 1 - 2\sqrt{5})$ et $B(1 + \sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5})$.

Exercice 9 : Exercice 9 : Problème d'optimisation géométrique

Un enclos rectangulaire, adossé à un mur, dispose d'une longueur de grillage de 40 mètres pour ses trois autres côtés. On note x la largeur de l'enclos (en mètres).

1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'enclos en fonction de x . Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$.

Les deux largeurs mesurent x et la longueur mesure $40 - 2x$.

L'aire est donc $\mathcal{A}(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

Puisque $x > 0$ et $40 - 2x > 0 \iff x < 20$, l'ensemble de définition est $\mathcal{D} =]0; 20[$.

2. Mettre $\mathcal{A}(x)$ sous forme canonique.

$$\mathcal{A}(x) = -2(x^2 - 20x) = -2((x - 10)^2 - 100) = -2(x - 10)^2 + 200$$

3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale? Quelle est cette aire maximale?

Grâce à la forme canonique, comme $a = -2 < 0$, la fonction admet un maximum atteint pour $x = 10$.

Ce maximum vaut $\mathcal{A}(10) = 200 \text{ m}^2$.

L'aire est donc maximale pour une largeur de 10 mètres, et cette aire maximale est de 200 m^2 .