

Équations et fonctions du second degré

« L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite ; la géométrie n'est qu'une algèbre figurée. »

Sophie Germain

Contenus :

- Forme développée, forme canonique et forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré.
- Résolution d'une équation du second degré : discriminant Δ , racines.
- Signe d'un trinôme et variations d'une fonction du second degré.

Capacités attendues :

- Passer d'une forme à une autre (développée, canonique, factorisée).
- Déterminer les racines d'une équation du second degré et factoriser si possible.
- Étudier le signe d'un trinôme et résoudre des inéquations du second degré.
- Étudier la position relative de deux courbes et résoudre des problèmes de modélisation.

Repères historiques et applications modernes**Aux origines de l'algèbre et de la parabole**

- **Al-Khwarizmi (IX^e siècle) :** Dans son traité *Al-Jabr*, il développe la méthode géométrique de « complétion du carré », précurseur direct de la forme canonique.
- **Galilée et René Descartes (XVII^e siècle) :** Galilée démontre que la trajectoire d'un corps en chute libre suit une parabole. Descartes relie ensuite l'équation algébrique $y = ax^2 + bx + c$ à la géométrie de la parabole.

Applications modernes

- **Physique et balistique :** Modélisation de trajectoires (portée, hauteur maximale au sommet S , points d'impact via les racines).
- **Optique et ondes :** Propriété réfléchissante de la parabole pour la focalisation des ondes (antennes satellites, phares, miroirs de télescopes).
- **Optimisation :** Recherche d'extrema en économie (bénéfice maximal, coût minimal).

I. Forme canonique et représentation graphique

Définition 1 : Forme développée

On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels fixés avec $a \neq 0$. Cette écriture est appelée la **forme développée** de f .

Exemples

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est un trinôme avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
- $g(x) = -x^2 + 5$ est sous forme développée avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = 5$.
- $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ est sous forme développée avec $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 0$.

Contre-exemples

- $f(x) = 3x + 4$ n'est pas du second degré car $a = 0$ (fonction affine).
- $g(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ n'est pas un trinôme car le degré le plus élevé est 3.
- $h(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$ n'est pas une fonction polynôme.

Propriété 1 : Forme canonique

Toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière unique sous la forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Démonstration.

Pour tout réel x , comme $a \neq 0$, on factorise par a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient bien $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. □

Exemple

Soit $f(x) = -3x^2 + 24x - 21$ Alors

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -3(x^2 - 8x + 7) \\
 &= -3(x^2 - 2 \times 4 \times x + 7) \\
 &= -3(x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 - 4^2 + 7) \\
 &= -3[(x - 4)^2 - 16 + 7] \\
 &= -3(x - 4)^2 + 27
 \end{aligned}$$

Exercice 1 : Donner la forme canonique

Donner la forme canonique des polynômes du second degré suivants en utilisant deux méthodes différentes :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$
2. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

Propriété 2 : Représentation graphique et variations

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction du second degré f est une parabole $\mathcal{P}$.

- Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha; \beta)$.
- L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale d'équation $x = \alpha$.
- Si $a > 0$: La parabole est orientée vers le haut. f est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet un minimum égal à β en $x = \alpha$.
- Si $a < 0$: La parabole est orientée vers le bas. f est strictement croissante sur $] -\infty; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Elle admet un maximum égal à β en $x = \alpha$.

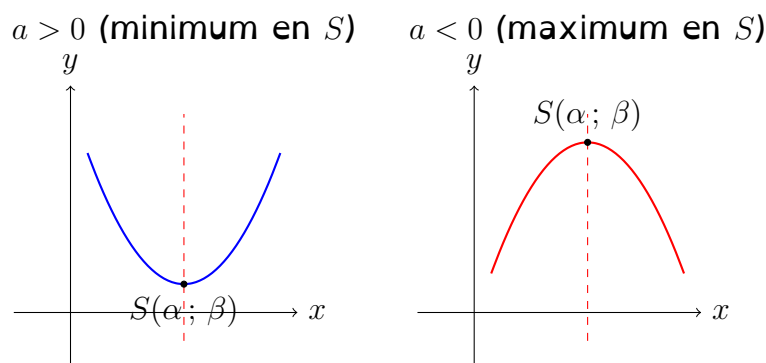


Figure 1 : Allure de la parabole selon le signe du coefficient a

II. Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et factorisation

Définition 2 : Discriminant et racines

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- On appelle **discriminant** du trinôme le nombre réel défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- On appelle **racine** de f tout nombre réel x solution de l'équation $f(x) = 0$.

- Si $\Delta > 0$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$$

$$f(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$f(x) = 0 \iff x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On note :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

x_1 et x_2 sont les racines de $f(x)$.

On a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

$$f(x) = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$$

On note $x_0 = -\frac{b}{2a}$ l'unique racine (dite racine double) de $f(x)$.

On a : $f(x) = a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta < 0$

L'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle (pas de racine).

$f(x)$ ne peut pas se factoriser sous forme de produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : Résolution et factorisation

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le trinôme se factorise sous la forme : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$: L'équation admet une unique solution réelle (dite racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Le trinôme se factorise sous la forme : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune solution réelle. Le trinôme ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$

Propriété 3 : Somme et produit des racines

Si un trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (distinctes ou confondues), alors :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque

Le produit permet de déterminer très rapidement une seconde racine lorsqu'une racine évidente (comme 1 ou -1) est identifiée.

Exemple

Le polynôme $f(x) = 3x^2 - x - 2$ admet pour racine évidente $x_1 = 1$.

On a $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3}$.

Or $x_1 = 1$ donc la seconde racine est $x_2 = -\frac{2}{3}$

Propriété 4 : Recherche de deux nombres de somme S et produit P

On considère deux nombres a et b tels que leur somme soit S et leur produit soit P .

Les nombres a et b sont alors solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.

III. Signe du trinôme et applications

Théorème 2 : Signe d'un trinôme du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Un trinôme du second degré est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.

- Si $\Delta > 0$ (avec $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de	0	signe de	0
	a		$-a$	a

- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est strictement du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et s'annule en x_0 .
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est strictement du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 5 : Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'équations $y = f(x)$ et $y = g(x)$:

1. On étudie le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.
2. Si $f(x) - g(x) \geq 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.
3. Si $f(x) - g(x) \leq 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$.

IV. Exercices d'application

Exercice 3 : Passer d'une forme à l'autre et variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 24x - 21$.

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. En déduire le sommet S de la parabole et dresser le tableau de variations de f .
3. Déterminer les racines de f et en déduire sa forme factorisée.

Exercice 4 : Utilisation des racines évidentes

Soit $g(x) = 3x^2 - x - 2$.

1. Démontrer que $x_1 = 1$ est une racine évidente de g .
2. À l'aide de la propriété du produit des racines $P = \frac{c}{a}$, calculer la seconde racine x_2 .
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ sous forme de tableau.

Exercice 5 : Position relative de deux paraboles

Soient $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 2$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $d(x) = f(x) - g(x)$. Montrer que $d(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Étudier le signe de $d(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les intervalles sur lesquels la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$.