

Les suites numériques

« Les mathématiques sont l'art de donner le même nom à des choses différentes. »

Henri Poincaré

Contenus :

- Mode de génération d'une suite (formule explicite $u_n = f(n)$ et relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$).
- Sens de variation d'une suite numérique (définition, méthodes d'étude).
- Notion intuitive de limite (convergence et divergence).

Capacités attendues :

- Calculer des termes d'une suite définie explicitement ou par récurrence.
- Représenter graphiquement une suite (nuage de points).
- Étudier le sens de variation d'une suite (signe de $u_{n+1} - u_n$, comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ou variations de la fonction associée).
- Modéliser une situation concrète à l'aide d'une suite.

Repères historiques et applications modernes

Aux origines du concept de suite

- **Zénon d'Élée (V^e siècle av. J.-C.)** : À travers ses paradoxes (Achille et la tortue), il soulève les premières interrogations sur l'infini discret et le comportement à long terme.
- **Léonard de Pise dit Fibonacci (XIII^e siècle)** : Dans son ouvrage *Liber Abaci*, il formalise l'une des premières suites récursives célèbres en modélisant le développement d'une population de lapins.

Applications modernes

- **Informatique et algorithmique** : Les boucles d'itération, les algorithmes récursifs et les calculs approchés reposent directement sur le principe des suites.
- **Biologie et dynamique des populations** : Analyse de la croissance d'espèces, prévision de la propagation d'épidémies.
- **Finance et modélisation** : Évolution d'un capital avec intérêts, plan d'amortissement et prévisions économiques.

I. Généralités sur les suites numériques

Définition 1 : Suite numérique

Soit p un entier naturel. Une **suite numérique** u définie à partir du rang p est une fonction qui, à chaque entier $n \geq p$, associe un nombre réel, noté u_n .

- La suite est notée $(u_n)_{n \geq p}$, (u_n) ou simplement u .
- u_n se lit « u indice n » et représente le **terme général** (ou terme de rang n).
- u_p est le **premier terme** (ou terme initial) de la suite.
- u_{n-1} , u_n et u_{n+1} sont trois termes consécutifs.

Remarque

Attention à la notation indicielle ! u_{n+1} est le terme qui suit u_n . On ne doit pas le confondre avec $u_n + 1$, qui est la somme du terme u_n et de 1.

II. Modes de génération d'une suite

Une suite numérique peut être définie principalement de deux manières :

Propriété 1 : Par une formule explicite

Chaque terme u_n s'exprime directement en fonction de n .

$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$.

Remarque

Cela signifie qu'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fournissant la valeur de n .

Exemple

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0,5n - 1$.

$$u_0 = 0,5 \times 0 - 1 = -1 \quad \text{et} \quad u_5 = 0,5 \times 5 - 1 = 1,5$$

Propriété 2 : Par une relation de récurrence

On donne le premier terme u_p et une relation permettant de calculer chaque terme à partir du (ou des) terme(s) précédent(s).

Exemples

- La suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- La suite (v_n) définie par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = n \times v_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- La suite (w_n) définie par
$$\begin{cases} w_0 = 2, w_1 = 5 \\ w_{n+2} = -3w_{n+1} + 4w_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Remarque

- Il est nécessaire de connaître tous les termes de la suite qui précèdent le rang qui nous intéresse. On doit calculer $u_1, u_2, \dots, u_9$ pour pouvoir calculer u_{10} .
- Il n'est pas toujours facile ou possible d'obtenir la définition explicite d'une suite quand elle est définie par récurrence.
- Quand on calcule les termes d'une suite définie par récurrence, il faut bien faire attention à la valeur de n .

Reprenons l'exemple de la suite (v_n) définie par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = n \times v_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 Ainsi :

$v_1 = v_{0+1}$	$v_2 = v_{1+1}$	$v_3 = v_{2+1}$
$= 0 \times v_0 + 1$	$= 1 \times v_1 + 1$	$= 2 \times v_2 + 1$
$= 0 \times 1 + 1$	$= 1 \times 1 + 1$	$= 2 \times 2 + 1$
$= 1$	$= 2$	$= 5$

- En reprenant le premier exemple, chaque terme s'obtient à partir du précédent par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$: il existe ainsi une fonction f telle que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$ (ici, $f(x) = -x + 2$).

Exercice 1 : Calcul de termes

1. Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0 , u_1 et u_{10} .
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = v_n^2 - 3$. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

III. Représentation graphique d'une suite

Propriété 3 : Représentation graphique

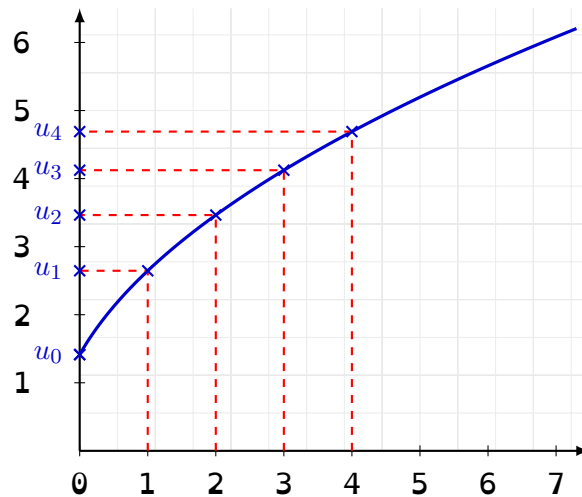
Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite (u_n) est le **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$ où les abscisses n sont des entiers naturels.

A. Suite définie de façon explicite dans un repère

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{5n+2}$.
On représente dans un repère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{5x+2}$.

On place ensuite les points de coordonnées $(n; f(n))$ et enfin, en projetant sur l'axe des ordonnées, on place les points de coordonnées $(0; f(n))$.



B. Suite définie par récurrence dans un repère

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 20}{2u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x + 20}{2x + 1}$.

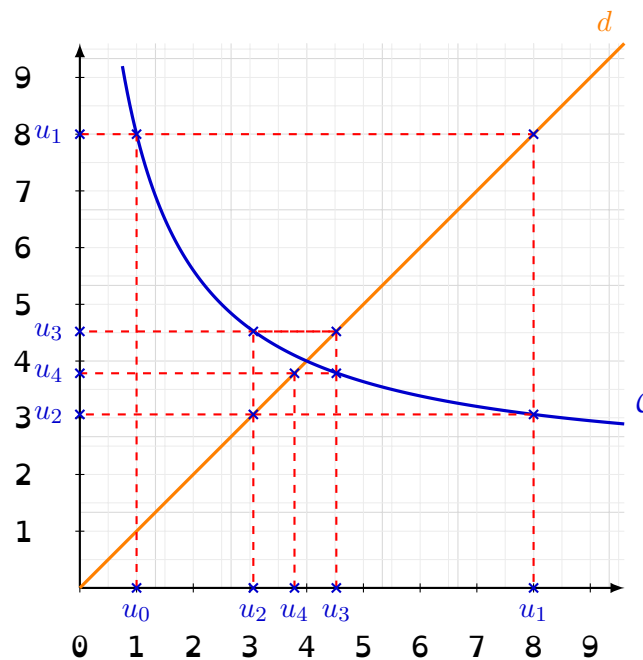
On représente la fonction f dans un repère et la droite d d'équation $y = x$.

On place le point de coordonnées $(u_0; 0)$. On obtient son projeté M_0 sur la courbe C représentant f de coordonnées $(u_0; f(u_0))$, c'est-à-dire de coordonnées $(u_0; u_1)$.

On trace la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point M_0 . Elle coupe la droite d au point de coordonnées $(u_1; u_1)$.

Le projeté sur l'axe des abscisses fournit le point de coordonnées $(u_1; 0)$.

On répète l'opération pour obtenir tous les points de coordonnées $(u_n; 0)$.



IV. Sens de variation

Définition 2 : Sens de variation

Soit u une suite définie pour tout $n \geq p$:

- La suite u est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite u est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite u est **constante** (ou stationnaire) si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques

- Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang p », cela signifie que la suite est croissante, décroissante, monotone ou constante à partir du rang de son premier terme.
- On parle également de suite strictement croissante ou strictement décroissante lorsque les inégalités de la définition sont strictes.
- On dit qu'une suite est (strictement) monotone à partir du rang k si elle est (strictement) décroissante ou (strictement) croissante à partir du rang k .
- Il existe des suites qui ne sont ni monotones ni constantes comme par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = (-1)^n$.
- Étudier le sens de variation d'une suite consiste à préciser si elle est croissante ou décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

1. Étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ (Méthode générale) :

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq p$, alors la suite est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq p$, alors la suite est décroissante.

2. Comparaison du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (pour les suites à termes strictement positifs) :

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq p$, alors la suite est croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \geq p$, alors la suite est décroissante.

3. Étude des variations de la fonction associée f (si $u_n = f(n)$) :

- Si f est croissante sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemples

1. Étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 3$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5(n+1) + 3 - (5n + 3) \\ &= 5n + 5 + 3 - 5n - 3 \\ &= 5 \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 3 \times 0,2^n$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 3 \times 0,2^{n+1} - 3 \times 0,2^n \\ &= 3 \times 0,2^n \times 0,2 - 3 \times 0,2^n \times 1 \\ &= 3 \times 0,2^n (0,2 - 1) \\ &= 3 \times 0,2^n \times (-0,8) \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

- On considère la suite (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 = 4 \\ w_{n+1} = w_n + n - 2 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= w_n + n - 2 - w_n \\ &= n - 2 \end{aligned}$$

Or $n - 2 \geq 0 \iff n \geq 2$.

La suite (w_n) est donc croissante à partir du rang 2.

2. Comparaison du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

⚠ Il faut absolument prouver que tous les termes sont strictement positifs avant d'utiliser cette propriété.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2 \times 4^n$.

Pour tout entier naturel n , $4^n > 0$ donc $u_n > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2 \times 4^{n+1}}{2 \times 4^n} \\ &= \frac{2 \times 4^n \times 4}{2 \times 4^n} \\ &= 4 \\ &> 1 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

V. Notion de limite

Définition 3 : Notion intuitive de limite

On s'intéresse au comportement des termes u_n lorsque n devient très grand ($n \rightarrow +\infty$).

- **Suite convergente** : Lorsque les termes u_n se rapprochent d'un nombre réel l quand n augmente indéfiniment, on dit que la suite **converge vers** l . On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

- **Suite divergente** : Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente (les termes tendent vers $+\infty$, $-\infty$, ou n'admettent pas de limite).

Remarque

Cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont de plus en plus proches de l .

Méthode : Observer le comportement d'une suite

Pour observer le comportement d'une suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ (ou lorsque n prend de grandes valeurs), on peut :

- **Utiliser le tableau de valeurs** de la suite (calculatrice) pour observer les valeurs prises par u_n pour de grands rangs ($n = 100, 1000, \dots$).
- **Afficher la représentation graphique** de la suite (nuage de points de coordonnées (n, u_n)) pour visualiser le sens de variation et une éventuelle stabilisation.
- **Programmer un algorithme** (ex. en Python) pour calculer de nombreux termes ou déterminer à partir de quel rang un seuil est franchi.
- **Utiliser un tableur** pour générer rapidement une longue série de termes et leur graphique.

Objectif : Ces outils permettent d'émettre une **conjecture** sur :

- La **limite** de la suite (convergence vers un réel l ou divergence vers $\pm\infty$).
- Le **sens de variation** de la suite à long terme.

⚠ Une conjecture numérique ou graphique ne constitue pas une preuve ; elle doit toujours être confirmée par une **démonstration mathématique**. Mais en Première, on se limite à cette approche expérimentale et intuitive.

Exemples

- On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -0,2u_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$ On a $u_0 = 3$,
 $u_1 = -0,6$, $u_2 = 0,12$, $u_3 = -0,024$, $u_4 = 0,0048$, ...
Les termes u_n semblent se rapprocher de plus en plus de 0.
Il semblerait donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{5n-1}{n+2}$.
On constate que $v_9 = 4$, $v_{20} = 4,5$, $v_{42} = 4,75$, $v_{98} = 4,89$, $v_{218} = 4,95$.
Les termes de la suite semblent se rapprocher de 5.
Il semblerait donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$.