

Nom et Prénom :

Classe : 1ère 1

DS de MATHÉMATIQUES**Durée : 3 heures**

Calculatrice COLLEGE autorisée

LE SUJET EST À RENDRE AVEC LA COPIE**Exercice 1 : QCM (10 points)**

Ce QCM comprend 10 questions indépendantes. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Pour chaque question, cocher ou entourer la réponse choisie directement dans le tableau ci-dessous. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Énoncé	A	B	C	D
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Le minimum de f est :	-2	1 (B)	2	5
2. Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x - 3)^2 - 2$?	$0,5(x - 1)(x - 5)$ (A)	$0,5(x + 1)(x - 5)$	$0,5(x - 3)(x + 2)$	$0,5x^2 - 3x + 2,5$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Laquelle des propositions est juste ?	$2(x - 2)(x + 3)$ (A)	$2(x + 2)(x - 3)$	$(2x - 4)(2x + 6)$	$2(x - 6)(x + 1)$
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 1)^2 + 4$. On peut affirmer qu'elle est :	croissante sur $]1; +\infty[$	décroissante sur $]1; +\infty[$ (B)	croissante sur $] - \infty; 4[$	décroissante sur $] - \infty; 1[$
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x - 4 < 0$ est :	$] - 1; 4[$ (A)	$] - \infty; -1[\cup]4; +\infty[$	$]1; -4[$	$] - 4; 1[$
6. La parabole d'équation $y = 2x^2 - 8x + 3$ a pour sommet S et pour axe de symétrie Δ . On a :	$S(2; -5)$ $\Delta : x = 2$ (A)	$S(2; -5)$ $\Delta : y = -5$	$S(-2; 27)$ $\Delta : x = -2$	$S(4; 3)$ $\Delta : x = 4$
7. Combien y a-t-il de fonctions polynômes du second degré qui s'annulent en -2 et en 5 ?	0	1 seule	2	une infinité (D)
8. Une fonction polynôme du second degré :	est toujours strictement positive	n'a jamais de racines réelles	peut avoir 0, 1 ou 2 racines réelles (C)	a toujours 2 racines réelles
9. Les courbes des fonctions $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ et $x \mapsto x^2 + 4x - 1$ ont :	0 point d'intersection (A)	1 point d'intersection	2 points d'intersection	3 points d'intersection
10 Soit la parabole de sommet $S(-1; -4,5)$, représentative d'une fonction f s'annulant en -4 et 2 . L'expression de $f(x)$ est :	$0,5x^2 + x - 4$ (A)	$x^2 + 2x - 8$	$-0,5x^2 - x + 4$	$0,5x^2 - x - 4$

Exercice 2 : Forme canonique et Variations (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

$$f(x) = -2(x^2 - 3x) - 4 = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

2) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations complet.

Comme $a = -2 < 0$, la fonction est croissante sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$ puis décroissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$

(ou valeur maximale $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$).

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.

Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = -4$, donc le point est $(0; -4)$.

Intersection avec l'axe des abscisses : $-2x^2 + 6x - 4 = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x-1)(x-2) = 0$, donc les points sont $(1; 0)$ et $(2; 0)$.

Exercice 3 : Formes canonique, factorisée et reconnaissance (3 points)

Compléter directement sur le sujet sans justifier :

- La parabole d'équation $y = 2(x-5)^2 - 3$ a pour sommet $S(5; -3)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 5$
- La courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3(x+1)(x-7)$:
 - coupe l'axe des abscisses en : $(-1; 0)$ et $(7; 0)$
 - coupe l'axe des ordonnées en : $(0; 21)$
 - a pour axe de symétrie la droite d'équation : $x = 3$
- Entourer uniquement les expressions qui définissent une fonction polynôme du second degré :

$$4x^2 - x + 7$$

$$3x - x^2 + 2$$

$$5x(x+2) - 5x^2$$

$$(x+1)^3 - x^3$$

$$2x^3 - x^2 + 1$$

Exercice 4 : Développement, factorisation et résolutions (4 points)

On considère l'expression définie pour tout réel x par :

$$A(x) = (2x-3)^2 + (4x-6)(x+4)$$

1. Démontrer que, pour tout réel x :

a) $A(x) = 8x^2 - 2x - 15$

$$A(x) = 4x^2 - 12x + 9 + 4x^2 + 16x - 6x - 24 = 8x^2 - 2x - 15.$$

b) $A(x) = (2x-3)(4x+5)$

$$A(x) = (2x-3)^2 + 2(2x-3)(x+4) = (2x-3)[(2x-3) + 2(x+4)] = (2x-3)(2x-3+2x+8) = (2x-3)(4x+5).$$

2. En choisissant à chaque fois la forme de $A(x)$ la mieux adaptée :

a) Calculer $A(0)$.

Avec la forme développée : $A(0) = 8(0)^2 - 2(0) - 15 = -15.$

b) Résoudre l'équation $A(x) = 0$.

Avec la forme factorisée : $(2x-3)(4x+5) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{4}.$

Ensemble de solutions : $\{-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\}.$

c) Résoudre l'équation $A(x) = -15$.

$$8x^2 - 2x - 15 = -15 \iff 8x^2 - 2x = 0 \iff 2x(4x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{4}.$$

3. Résoudre l'inéquation $A(x) \leq 0$. On précisera la propriété du cours utilisée.

$(2x-3)(4x+5) \leq 0$. Les racines sont $-\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$. Le coefficient dominant est $8 > 0$, donc le trinôme est négatif entre les racines.

Solution : $[-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}]$.

Exercice 5 : Somme et produit des racines (6 points)

Partie A – Démonstration

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$. Dans toute cette partie, on suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif. On note x_1 et x_2 les deux racines de f .

1. Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

2. Démontrer que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\Delta)}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

3. Démontrer que ces deux formules restent vraies dans le cas où $\Delta = 0$.

Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$. La somme vaut $-\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$ et le produit vaut $(-\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Partie B – Applications

Dans cette partie, on note S la somme et P le produit des racines du trinôme considéré. Les formules de la partie A pourront être utilisées sans être redémontrées.

1. On considère le trinôme $3x^2 - 12x + 5$. Vérifier qu'il admet deux racines distinctes, puis donner S et P sans calculer ces racines.

$\Delta = (-12)^2 - 4(3)(5) = 144 - 60 = 84 > 0$, donc il admet deux racines distinctes.
 $S = -\frac{-12}{3} = 4$ et $P = \frac{5}{3}$.

2. On considère le trinôme $2x^2 - 3x - 2$.

a) Vérifier que 2 est une racine de ce trinôme.

$2(2)^2 - 3(2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$, donc 2 est bien racine.

b) En déduire la seconde racine sans calculer le discriminant. Expliquer la méthode utilisée.

Le produit des racines est $P = \frac{-2}{2} = -1$. Si $x_1 = 2$, alors $2 \times x_2 = -1 \implies x_2 = -\frac{1}{2}$.

3. Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut 7 et le produit 12.

Ces nombres sont les racines du trinôme $X^2 - 7X + 12 = 0$, soit 3 et 4.

Exercice 6 : Modélisation et Trajectoire (4 points)

Un ballon de football est botté depuis le sol. Sa trajectoire est modélisée dans un repère orthogonal par la fonction h définie par :

$$h(x) = -0,05x^2 + x$$

où x représente la distance horizontale parcourue par le ballon (en mètres) et $h(x)$ sa hauteur (en mètres).

1) À quelle distance du point de tir le ballon retombe-t-il au sol ?

$h(x) = 0 \iff -0,05x^2 + x = 0 \iff x(-0,05x + 1) = 0$. Comme $x > 0$, $-0,05x + 1 = 0 \implies x = \frac{1}{0,05} = 20$ m. Le ballon retombe à 20 m.

2) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ? À quelle distance horizontale cette hauteur est-elle atteinte ?

La hauteur maximale est atteinte au sommet : $x_S = \frac{-1}{2 \times (-0,05)} = 10$ m.

La hauteur max est $h(10) = -0,05(100) + 10 = 5$ m.

- 3) Un joueur, mesurant 1,80 m, est placé à 16 m du point de tir. Peut-il intercepter le ballon de la tête (en admettant qu'il puisse toucher le ballon à une hauteur supérieure ou égale à 1,80 m)? Justifier.

À 16 m, la hauteur du ballon est $h(16) = -0,05(16)^2 + 16 = -12,8 + 16 = 3,2$ m.

Comme $3,2 \text{ m} \geq 1,80 \text{ m}$, le joueur peut l'intercepter.

Exercice 7 : Études de paramètres et d'intersections (3 points)

Soit m un nombre réel. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = x^2 - mx + 4$$

- 1) Pour quelles valeurs du réel m la parabole représentant f_m coupe-t-elle l'axe des abscisses en deux points distincts ?

$\Delta = (-m)^2 - 4(1)(4) = m^2 - 16$. Deux points distincts $\iff \Delta > 0 \iff m^2 - 16 > 0 \iff m \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$.

- 2) Déterminer la valeur de m pour laquelle la parabole admet son sommet sur l'axe des abscisses.

Le sommet est sur l'axe des abscisses si et seulement si l'ordonnée du sommet est nulle, ce qui équivaut à $\Delta = 0 \iff m^2 - 16 = 0 \iff m = -4$ ou $m = 4$.

Exercice Bonus : Le mystère de la billetterie (3 points) Un festival de cinéma propose deux types de tarifs : un tarif « Plein » et un tarif « Réduit ».

Le service comptable a retrouvé deux anciennes factures, mais les prix unitaires ont malencontreusement été effacés :

- **Facture 1** : 120 places au tarif Plein et 80 places au tarif Réduit pour un montant total de 1 600 €.
- **Facture 2** : 90 places au tarif Plein et 150 places au tarif Réduit pour un montant total de 1 650 €.

Travail demandé :

Proposer une démarche mathématique rigoureuse permettant de retrouver le prix exact de chaque type de place.

Soit x le prix d'une place Plein et y le prix d'une place Réduit.

On obtient le système : $\begin{cases} 120x + 80y = 1600 \\ 90x + 150y = 1650 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ 3x + 5y = 55 \end{cases}$

En soustrayant la première ligne de la seconde : $(3x + 5y) - (3x + 2y) = 55 - 40 \iff 3y = 15 \iff y = 5$ €.

En reportant dans la première équation : $3x + 2(5) = 40 \iff 3x = 30 \iff x = 10$ €.

Le tarif Plein est de 10 € et le tarif Réduit de 5 €.

Une troisième facture mentionnant l'achat de 60 places au tarif Plein et 100 places au tarif Réduit pour un montant de 1 100 € a-t-elle pu être établie selon la même grille tarifaire? Justifier.

Calculons le montant pour cette troisième facture avec les prix trouvés : $60 \times 10 + 100 \times 5 = 600 + 500 = 1\,100$ €. Oui, cette facture a bien pu être établie selon la même grille tarifaire.