

Nom et Prénom :

Classe : 1ère 1

DS de MATHEMATIQUES**Durée : 3 heures**

Calculatrice COLLEGE autorisée
LE SUJET EST À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1 : QCM (10 points)

Ce QCM comprend 10 questions indépendantes. Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Pour chaque question, cocher ou entourer la réponse choisie directement dans le tableau ci-dessous. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire de point.

Énoncé	A	B	C	D
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Le minimum de f est :	-2	1	2	5
2. Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x - 3)^2 - 2$?	$0,5(x - 1)(x - 5)$	$0,5(x + 1)(x - 5)$	$0,5(x - 3)(x + 2)$	$0,5x^2 - 3x + 2,5$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Laquelle des propositions est juste ?	$2(x - 2)(x + 3)$	$2(x + 2)(x - 3)$	$(2x - 4)(2x + 6)$	$2(x - 6)(x + 1)$
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x - 1)^2 + 4$. On peut affirmer qu'elle est :	croissante sur $]1; +\infty[$	décroissante sur $]1; +\infty[$	croissante sur $] - \infty; 4[$	décroissante sur $] - \infty; 1[$
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x - 4 < 0$ est :	$] - 1; 4[$	$] - \infty; -1[\cup]4; +\infty[$	$]1; -4[$	$] - 4; 1[$
6. La parabole d'équation $y = 2x^2 - 8x + 3$ a pour sommet S et pour axe de symétrie Δ . On a :	$S(2; -5)$ $\Delta : x = 2$	$S(2; -5)$ $\Delta : y = -5$	$S(-2; 27)$ $\Delta : x = -2$	$S(4; 3)$ $\Delta : x = 4$
7. Combien y a-t-il de fonctions polynômes du second degré qui s'annulent en -2 et en 5 ?	0	1 seule	2	une infinité
8. Une fonction polynôme du second degré :	est toujours strictement positive	n'a jamais de racines réelles	peut avoir 0, 1 ou 2 racines réelles	a toujours 2 racines réelles
9. Les courbes des fonctions $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ et $x \mapsto x^2 + 4x - 1$ ont :	0 point d'intersection	1 point d'intersection	2 points d'intersection	3 points d'intersection
10 Soit la parabole de sommet $S(-1; -4,5)$, représentative d'une fonction f s'annulant en -4 et 2 . L'expression de $f(x)$ est :	$0,5x^2 + x - 4$	$x^2 + 2x - 8$	$-0,5x^2 - x + 4$	$0,5x^2 - x - 4$

Exercice 2 : Forme canonique et Variations (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

2) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de

variations complet.

- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses.

Exercice 3 : Formes canonique, factorisée et reconnaissance (3 points)

Compléter directement sur le sujet sans justifier :

- La parabole d'équation $y = 2(x - 5)^2 - 3$ a pour sommet $S(\dots; \dots)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $\dots$
- La courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3(x+1)(x-7)$:
 - coupe l'axe des abscisses en : $\dots$
 - coupe l'axe des ordonnées en : $\dots$
 - a pour axe de symétrie la droite d'équation : $\dots$
- Entourer uniquement les expressions qui définissent une fonction polynôme du second degré :

$4x^2 - x + 7$

$3x - x^2 + 2$

$5x(x+2) - 5x^2$

$(x+1)^3 - x^3$

$2x^3 - x^2 + 1$

Exercice 4 : Développement, factorisation et résolutions (4 points)

On considère l'expression définie pour tout réel x par :

$$A(x) = (2x - 3)^2 + (4x - 6)(x + 4)$$

- Démontrer que, pour tout réel x :
 - $A(x) = 8x^2 - 2x - 15$
 - $A(x) = (2x - 3)(4x + 5)$
- En choisissant à chaque fois la forme de $A(x)$ la mieux adaptée :
 - Calculer $A(0)$.
 - Résoudre l'équation $A(x) = 0$.
 - Résoudre l'équation $A(x) = -15$.
- Résoudre l'inéquation $A(x) \leq 0$. On précisera la propriété du cours utilisée.

Exercice 5 : Somme et produit des racines (6 points)

Partie A – Démonstration

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$. Dans toute cette partie, on suppose que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif. On note x_1 et x_2 les deux racines de f .

- Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- Démontrer que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
- Démontrer que ces deux formules restent vraies dans le cas où $\Delta = 0$.

Partie B – Applications

Dans cette partie, on note S la somme et P le produit des racines du trinôme considéré. Les formules de la partie A pourront être utilisées sans être redémontrées.

- On considère le trinôme $3x^2 - 12x + 5$. Vérifier qu'il admet deux racines distinctes, puis donner S et P sans calculer ces racines.
- On considère le trinôme $2x^2 - 3x - 2$.
 - Vérifier que 2 est une racine de ce trinôme.
 - En déduire la seconde racine sans calculer le discriminant. Expliquer la méthode utilisée.

3. Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut 7 et le produit 12.

Exercice 6 : Modélisation et Trajectoire (4 points)

Un ballon de football est botté depuis le sol. Sa trajectoire est modélisée dans un repère orthogonal par la fonction h définie par :

$$h(x) = -0,05x^2 + x$$

où x représente la distance horizontale parcourue par le ballon (en mètres) et $h(x)$ sa hauteur (en mètres).

- 1) À quelle distance du point de tir le ballon retombe-t-il au sol ?
- 2) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ? À quelle distance horizontale cette hauteur est-elle atteinte ?
- 3) Un joueur, mesurant 1,80 m, est placé à 16 m du point de tir. Peut-il intercepter le ballon de la tête (en admettant qu'il puisse toucher le ballon à une hauteur supérieure ou égale à 1,80 m) ? Justifier.

Exercice 7 : Études de paramètres et d'intersections (3 points)

Soit m un nombre réel. On considère la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = x^2 - mx + 4$$

- 1) Pour quelles valeurs du réel m la parabole représentant f_m coupe-t-elle l'axe des abscisses en deux points distincts ?
- 2) Déterminer la valeur de m pour laquelle la parabole admet son sommet sur l'axe des abscisses.

Exercice Bonus : Le mystère de la billetterie (3 points) Un festival de cinéma propose deux types de tarifs : un tarif « Plein » et un tarif « Réduit ».

Le service comptable a retrouvé deux anciennes factures, mais les prix unitaires ont malencontreusement été effacés :

- **Facture 1** : 120 places au tarif Plein et 80 places au tarif Réduit pour un montant total de 1 600 €.
- **Facture 2** : 90 places au tarif Plein et 150 places au tarif Réduit pour un montant total de 1 650 €.

Travail demandé :

Proposer une démarche mathématique rigoureuse permettant de retrouver le prix exact de chaque type de place.

Une troisième facture mentionnant l'achat de 60 places au tarif Plein et 100 places au tarif Réduit pour un montant de 1 100 € a-t-elle pu être établie selon la même grille tarifaire ? Justifier.