

Fiche d'exercices : Équations et fonctions du second degré

I. Forme canonique et variations

Exercice 1 : Passage à la forme canonique et sommet

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la forme canonique, puis donner les coordonnées du sommet S de la parabole ainsi que ses variations :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$
2. $g(x) = -x^2 + 6x - 5$
3. $h(x) = 3x^2 + 6x - 2$

Exercice 2 : Recherche d'une fonction par son sommet

Déterminer l'expression sous forme développée de la fonction polynôme du second degré f dont la représentation graphique est une parabole de sommet $S(2; -5)$ et qui passe par le point $A(0; 3)$.

II. Résolution d'équations et factorisation

Exercice 3 : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en calculant le discriminant Δ :

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0$
2. $-3x^2 + 6x - 3 = 0$
3. $4x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $x^2 - 7x + 10 = 0$

Exercice 4 : Factorisation de trinômes

Factoriser, lorsque cela est possible, les expressions suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $A(x) = 5x^2 + 13x - 6$
2. $B(x) = -2x^2 + 12x - 18$
3. $C(x) = x^2 - 3x + 7$

III. Somme, produit et racines évidentes

Exercice 5 : Utilisation d'une racine évidente

On considère le trinôme $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$.

1. Démontrer que $x_1 = 3$ est une racine évidente de f .
2. En utilisant le produit des racines $P = \frac{c}{a}$, déterminer la seconde racine x_2 de f .
3. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

Exercice 6 : Somme et produit

Déterminer deux nombres réels a et b sachant que leur somme est $S = 12$ et leur produit est $P = 35$.

IV. Signe du trinôme et inéquations

Exercice 7 : Résolution d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes en étudiant le signe du trinôme :

1. $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$
2. $x^2 - 4x + 4 > 0$
3. $3x^2 + x + 2 < 0$

V. Problèmes et modélisation

Exercice 8 : Position relative de deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.
2. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Préciser les coordonnées des éventuels points d'intersection de ces deux courbes.

Exercice 9 : Problème d'optimisation géométrique

Un enclos rectangulaire, adossé à un mur, dispose d'une longueur de grillage de 40 mètres pour ses trois autres côtés. On note x la largeur de l'enclos (en mètres).

1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'enclos en fonction de x . Préciser l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$.
2. Mettre $\mathcal{A}(x)$ sous forme canonique.
3. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ? Quelle est cette aire maximale ?