

Géométrie¹

« Diviser chacune des difficultés en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. »

René Descartes

Contenus

- Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Capacités attendues

- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles).
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Traiter de problèmes d'optimisation.

Démonstrations

- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.
- Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle.

Exemples d'approfondissement

- Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab\sin C$
- Formule d'Al-Kashi.
- Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.

I. Définir et utiliser les coordonnées

Définition 1

Un repère du plan est défini par la donnée de trois points non alignés O, I et J deux à deux distincts.

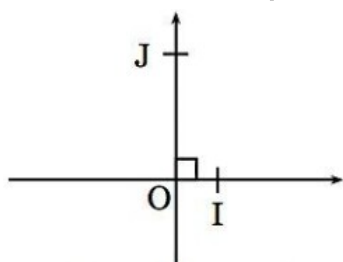
- On note (O ; I ; J) le repère ainsi obtenu.
- Le point O s'appelle l'origine du repère.
- La droite (OI) se nomme l'axe des abscisses. Elle est graduée de O vers I, avec O pour origine et avec OI pour unité de longueur.

¹ Karine ZANLUCCHI

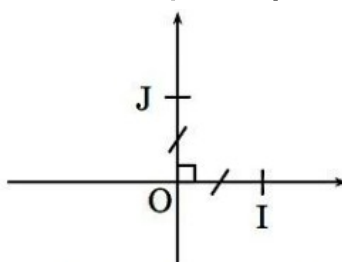
- La droite (OJ) se nomme l'axe des ordonnées. Elle est graduée de O vers J, avec O pour origine et avec OJ pour unité de longueur.

Dans le plan, on distingue trois types de repère :

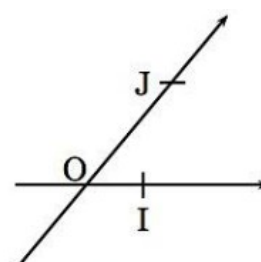
- Un repère est dit orthogonal lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires (OIJ est un triangle rectangle en O).
- Un repère est dit orthonormé (ou orthonormal) lorsqu'il est orthogonal et que, de plus, $OI = OJ$ (OIJ est un triangle rectangle isocèle de sommet principal O).
- Tout autre repère est qualifié de repère quelconque.



Repère orthogonal



Repère orthonormé



Repère quelconque

II. Calculer les coordonnées d'un milieu

Propriété 1

Dans tout repère du plan, les coordonnées du milieu I d'un segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exercice 1

1. A(5 ; 7) et B(- 3 ; 2) sont deux points du plan. Calculons les coordonnées du point K milieu de $[AB]$.
2. A(2 ; - 1) et K (4 ; 2) sont deux points du plan. Trouver les coordonnées du point B (x ; y) tel que K soit le milieu de $[AB]$.

III. Calculer la distance entre deux points

Propriété 2

Dans un repère orthonormé, la distance AB entre deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ est telle que :

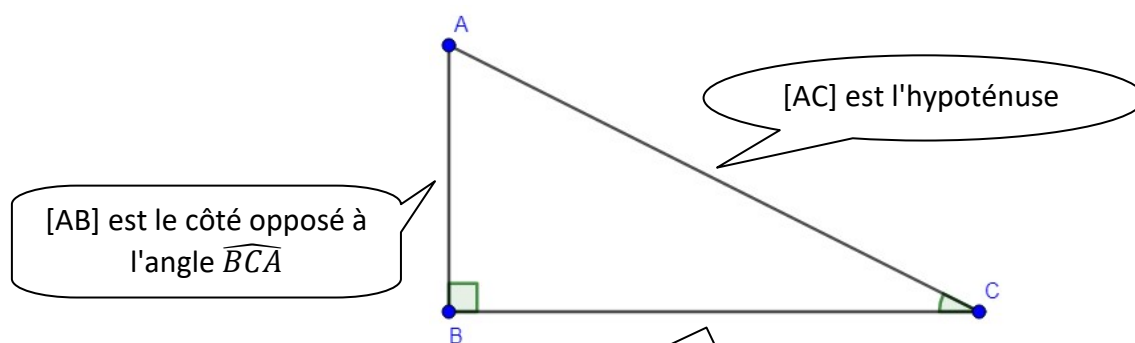
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice 2

1. Soient deux points $A(-6 ; 3)$ et $B(15 ; 9)$ du plan. Calculons la distance entre ces deux points.
2. Soit $(O ; I ; J)$ un repère orthonormé du plan. On considère les points $A(1 ; -2)$, $B(0 ; m)$, $C(6 ; -1)$. Trouver le réel m pour que ABC soit un triangle rectangle en A .

IV. Rappels sur le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en B .



Dans ce triangle ABC rectangle en B , d'après le théorème de Pythagore, on peut écrire : $AC^2 = BC^2 + BA^2$.

Définition 2

Formules de trigonométrie (SOH - CAH - TOA)

Dans ce triangle ABC rectangle en B , on définit le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{BCA}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\sin \widehat{BCA} &= \frac{AB}{AC} \\ \cos \widehat{BCA} &= \frac{BC}{AC} \\ \tan \widehat{BCA} &= \frac{AB}{BC}\end{aligned}$$

Propriété 3

Dans un triangle rectangle, on note α la mesure en degré de l'un des deux angles aigus. On a :

- $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ et $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Remarque

la notation $\sin^2(\alpha)$ signifie $\sin(\alpha) \times \sin(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$

Démonstration

On considère le triangle ABC ci-dessus rectangle en B. $\widehat{BCA}$ est un angle aigu.

$$\cos(\widehat{BCA}) = \frac{BC}{AC} \text{ et } \sin(\widehat{BCA}) = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin^2(\widehat{BCA}) + \cos^2(\widehat{BCA}) = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$

$$\sin^2(\widehat{BCA}) + \cos^2(\widehat{BCA}) = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$$

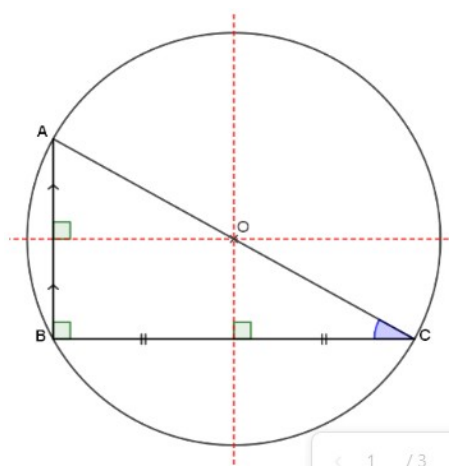
Or, dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

On en déduit que

$$\sin^2(\widehat{BCA}) + \cos^2(\widehat{BCA}) = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

Propriété 4

Dans un triangle rectangle, les médiatrices des deux côtés adjacents à l'angle droit se coupent au milieu O de l'hypoténuse. Le cercle de centre O et de rayon OB passe par les trois sommets du triangle. C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.



Propriété 5

Si un triangle est inscrit dans un cercle dont l'un de ses côtés est le diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

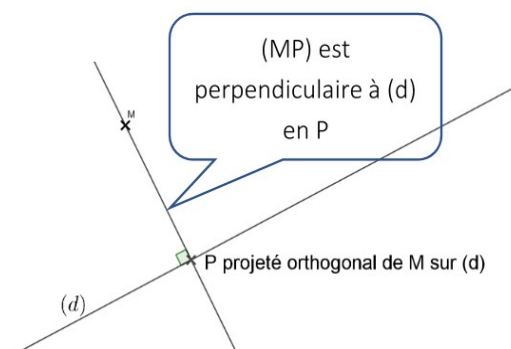
V. Projeter orthogonalement

Définition 3

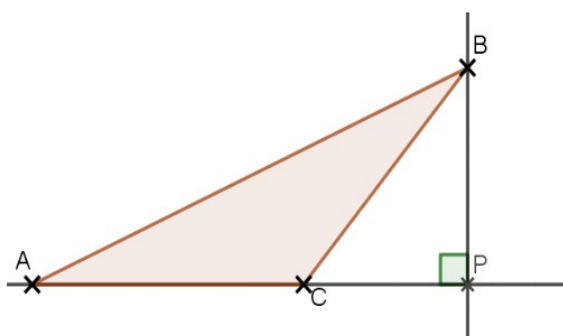
Projeté orthogonal

Soit (d) une droite et M un point du plan.

- Si M appartient à (d) alors le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point M .
- Si M n'appartient pas à (d) alors le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point P appartenant à (d) tel que la droite (MP) est perpendiculaire à (d) .



Exemple



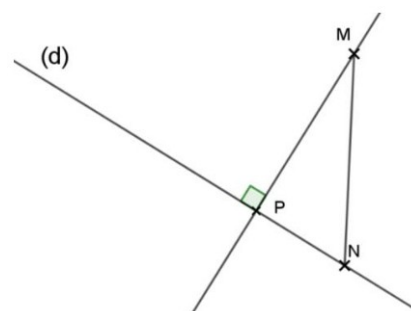
Ici, P est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) . C'est aussi le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC .

Définition 4

On appelle distance d'un point à une droite, la plus petite distance du point à un point de la droite.

Propriété 6

Le projeté orthogonal P d'un point M sur une droite (d) est le point appartenant à la droite (d) le plus proche de M : cela signifie que, pour tout point N distinct de P , on a $MN > MP$. MP est donc la distance du point M à la droite (d) .



Démonstration

Soit (d) une droite et M un point du plan. On note P le projeté orthogonal de m sur (d) .

- 1er cas : $M \in (d)$

M est confondu avec P et donc $MP = 0$.

Si N est un point distinct de P alors $MN \neq 0$ donc $MN > 0$ d'où $MN > MP$.

- 2ème cas : $M \notin (d)$

Soit N un point de (d) distinct de P.

Dans le triangle MPN rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore $MN^2 = MP^2 + PN^2$. Comme N est distinct de P, $PN^2 > 0$ donc $MP^2 < PN^2 + MP^2$ ou $MP^2 < MN^2$. MP et MN étant des nombres positifs, on en déduit que, pour tout point N de (d) distinct de P, $MP < MN$. MP est donc la distance minimale entre M et la droite (d).

Exercice 3

On considère un triangle ABC et sa hauteur [CK] issue de C.

On donne $AC = 7$ cm et $AK = 6$ cm.

Déterminer la distance du point C à la droite (AB).