

Calcul littéral¹ et Racines carrées

Z E T E T I C V M · X V I I.

Datâ differentiâ laterum & differentiâ Cuborum inuenire latera.

Sit datâ B, differentia laterum. Differentia vero Cuborum, D solidum. Oportet inuenire latera.

Summa laterum esto E, ergo E, + B erit duplum lateris maioris, & E — B erit duplum lateris minoris. Differentia autem cuborum illorum est B in E quadratum 6 + B Cubo 2 æqualis consequenter D solido 8.

Quare $\left\{ \frac{E^2 + B^2}{B} \right\}$ æquatur E quadrato.

Dati autem quadrati datur latus, & datâ differentiâ laterum & eorumdem summâ dantur latera.

Datâ igitur differentiâ laterum & differentiâ Cuborum inuenitur summa laterum.

Enimvero differentia Cuborum quadrupla, minùs Cubo differentie laterum, si adplicetur ad triplum differentie laterum, oritur quadratum adgregati laterum.

Sit B 6, D solidum 504, summa laterum 10, 12 æquatur 100.

Viète, Zeteticorum liber secundus, 1593

Viète décide de désigner les inconnues par des voyelles, et les paramètres donnés par des consonnes. Par exemple ici, le problème consiste à trouver deux nombres, étant données la différence des deux, ainsi que la différence des cubes.

Viète appelle grand B la différence des deux nombres, grand D la différence des cubes. Il choisit pour inconnue grand E la somme des deux nombres. Moyennant quoi, dit-il, $E + B$ est le double du plus grand, et $E - B$ le double du plus petit.

Faites votre calcul, la différence des deux cubes est un huitième fois $6E^2B + 2B^3$, donc $6E^2B + 2B^3$ égale $8D$. C'est exactement ce qui est écrit dans l'encadré bleu. Viète en déduit aussitôt E^2 en fonction de B et D. Il ne lui reste plus qu'à traduire la solution en mots, puis à donner un exemple.

Au fond, peu important les notations. Il reste que c'est la première fois dans l'histoire que l'on résout des équations uniquement en manipulant des symboles, et c'est cela qui compte.

Contenus

- Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.
- Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.

¹ Karine ZANLUCCHI

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées.

Démonstrations

- Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Quels que soient les réels positifs a et b , on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Approfondissements possibles

- Développement de $(a + b + c)^2$.
- Développement de $(a + b)^3$.

I. Calcul littéral

A. Développer et réduire

Définition 1

- **Développer** une expression littérale c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes.
- **Réduire** une expression littérale c'est regrouper les termes « semblables » (et effectuer les calculs associés) afin que chaque terme ne soit plus présent qu'une seule fois.

Exemple

$$\begin{aligned}(2x + 3)(4x + 5) &= 2x \times 4x + 2x \times 5 + 3 \times 4x + 3 \times 5 && \text{on développe} \\ &= 8x^2 + 10x + 12x + 15 && \text{on simplifie} \\ &= 8x^2 + 22x + 15 && \text{on réduit}\end{aligned}$$

B. Distributivité

Il existe deux types de distributivité :

- La simple distributivité : $5(x - 4) = 5x - 5 \times 4 = 5x - 20$
- La double distributivité :

$$\begin{array}{c}
 \text{1} \quad \text{2} \\
 \text{2x + 4} \quad \text{5x + 7} = 10x^2 + 14x + 20x + 28 \\
 \text{3} \quad \text{4} \\
 = 10x^2 + 34x + 28
 \end{array}$$

Exercice 1

Développer les expressions suivantes :

1. $(3x - 2)(x + 5)$
2. $(5x - 3)(2x - 4)$

C. Factoriser

Définition 2

Factoriser une expression littérale c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs.

$$\begin{array}{lcl}
 k a + k b & = & k (a + b) \\
 k a - k b & = & k (a - b) \qquad k : \text{facteur commun}
 \end{array}$$

Exemples

- $2x \times x + 2x \times 3 = 2x(x + 3)$
- $(3x - 2)(4x + 1) + (3x - 2)(-5x + 7) = (3x - 2)[(4x + 1) + (-5x + 7)]$
 $= (3x - 2)(-x + 8)$
- $(5x - 1)(2x + 3) - (5x - 1)(4x - 2) = (5x - 1)[(2x + 3) - (4x - 2)]$
 $= (5x - 1)(-2x + 5)$

D. Identités remarquables

Définition 3

Une égalité littérale est appelée **identité** si elle est vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y sont utilisées.

Exemples

- L'égalité $k(a + b) = ka + kb$ est vraie pour toutes valeurs de a , b , k . C'est donc une identité.

- L'égalité $3a^2 + 1 = 7$ est vraie pour $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$, mais elle est fausse, par exemple, pour $a = -1$, pour $a = 2$ ou pour $a = 37$. Ce n'est donc pas une identité.

Propriété 1

On considère deux nombres quelconques a et b .

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Remarque

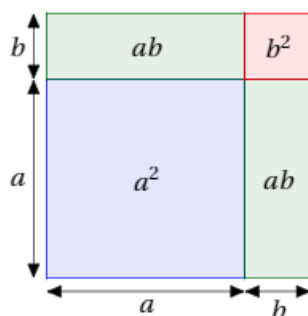
Cette propriété s'utilise aussi bien pour développer une expression que pour la factoriser.

Exercice 1

Démontrer la propriété 1.

Remarque

Illustration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pour a et b positifs



Un côté du grand carré mesure $a + b$. Son aire est donc $(a+b)^2$.

Cette aire peut également être décomposée comme la somme des aires de deux carrés et de deux rectangles.

Ainsi $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemples (développement)

- On veut développer $(3x + 5)^2$.

On va utiliser la propriété $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

- On veut développer $(4x - 6)^2$.

On va utiliser la propriété $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 6$

$$(4x-6)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 6 + 6^2 = 16x^2 - 48x + 36$$

- On veut développer $(2x - 5)(2x + 5)$.

On va utiliser la propriété $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 5$

$$(2x - 5)(2x + 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

Exemples (factorisation)

- On veut factoriser $25x^2 + 30x + 9 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2$

Dans la pratique, on cherche si $25x^2$ et 9 sont des carrés de nombres et on regarde ensuite si le terme en x peut s'écrire sous la forme $2ab$.

On va utiliser la propriété $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 3$

$$\text{Donc } 25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2.$$

- On veut factoriser $36x^2 - 48x + 16 = (6x)^2 - 2 \times 6x \times 4 + 4^2$

Dans la pratique, on cherche si $36x^2$ et 16 sont des carrés de nombres et on regarde ensuite si le terme en x peut s'écrire sous la forme $2ab$.

On va utiliser la propriété $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 6x$ et $b = 4$

$$\text{Donc } 36x^2 - 48x + 16 = (6x - 4)^2.$$

- On veut factoriser $9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2$

On va utiliser la propriété $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$

$$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$$

Exemples (factorisation avancée)

- On veut factoriser $16 - (2x + 5)^2$.

On va utiliser la propriété $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 16$ et $b = 2x + 5$

$$16 - (2x + 5)^2 = 4^2 - (2x + 5)^2 = [4 - (2x + 5)][4 + (2x + 5)]$$

$$= (4 - 2x - 5)(4 + 2x + 5) = (-2x - 1)(2x + 9)$$

- On veut factoriser $(4x - 3)^2 - (5x + 1)^2$.

On va utiliser la propriété $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x - 3$ et $b = 5x + 1$

$$(4x - 3)^2 - (5x + 1)^2 = [(4x - 3) - (5x + 1)][(4x - 3) + (5x + 1)]$$

$$= (4x - 3 - 5x - 1)(4x - 3 + 5x + 1) = (-x - 4)(9x - 2)$$

II. Racine carrée

A. Définition

Définition 4

On considère un nombre réel positif a . Il existe un unique réel positif dont le carré est égal à a .

Ce nombre est appelé la **racine carrée** de a et on le note $\sqrt{a}$.

Exemples

$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$ et $\sqrt{49} = 7$ car $7^2 = 49$.

Remarque

Comme l'indique la définition, un nombre négatif ne possède pas de racine carrée.

Propriété 2

On considère un nombre réel positif a . On a alors : $(\sqrt{a})^2 = a$

Exemple

$(\sqrt{7})^2 = 7$.

B. Opérations sur les racines carrées

Propriété 3

On considère deux nombres réels positifs a et b . On a alors :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si de plus $b > 0$ on a alors :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration

$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif en tant que produit de facteurs positifs.

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b.$$

Par définition, il existe un unique nombre positif, $\sqrt{a \times b}$ dont le carré est $a \times b$.

Ainsi $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemples

- $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{7}}{5}$
- $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{27}{75}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

Remarque importante

Si a et b sont deux réels positifs on a, en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Exemples :

- $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ et $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$. On a donc $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$.
- $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ et $\sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$. On a donc $\sqrt{4-1} \neq \sqrt{4} - \sqrt{1}$.

Propriété 4

On considère deux réels strictement positifs a et b . On a alors $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration

D'une part :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= a + b - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\
 &= a + b - (\sqrt{a}^2 + \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b} \times \sqrt{a} + \sqrt{b}^2) \\
 &= a + b - (a + 2\sqrt{ab} + b) \\
 &= a + b - a - 2\sqrt{ab} - b \\
 &= -2ab < 0
 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'identité remarquable vue en troisième $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$ avec $x = \sqrt{a+b}$ et $y = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &= ((\sqrt{a+b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \times ((\sqrt{a+b}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \\
 &= (\sqrt{a+b} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \times (\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b})
 \end{aligned}$$

On a donc montré que $(\sqrt{a+b} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})) \times (\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b}) < 0$.

Mais, en tant que somme de termes positifs, on sait que $\sqrt{a+b} + \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.

Cela signifie donc que $\sqrt{a+b} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) < 0$ soit $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Propriété 5

On considère un nombre réel positif a et un entier naturel n tels que $(a ; n) \neq (0 ; 0)$. On a alors $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$

Exemple

$$\sqrt{2^3} = (\sqrt{2})^3.$$