

Corrigé type

Classe : 2nd 8

Correction du Devoir Surveillé de Mathématiques (Durée : 2h)

Thèmes : Ensembles de nombres, Intervalles et Repérage dans le plan

Exercice 1 : Question de cours : Définitions et ensembles (4,5 points)

Compléter les phrases suivantes :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels (positifs ou nuls, ex : 0, 1, 2, ...)
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux (qui possèdent un nombre fini de chiffres après la virgule)
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nuls, ex : ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels (tous les nombres représentables sur une droite graduée)
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels (quotients de deux entiers)
- Donner la définition d'un nombre rationnel :
Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier non nul.
- Donner la définition d'un nombre réel :
Un nombre réel est un nombre qui correspond à une abscisse sur une droite graduée infinie. Il englobe tous les nombres rationnels et irrationnels.

Exercice 2 : Intervalles et inégalités (2,5 points)

1) Traduire chaque inégalité par l'appartenance à un intervalle, puis représenter cet intervalle sur une droite graduée (lorsque c'est possible) :

- a) $-3 \leq x < 5$ b) $x > -2$ c) $x \leq 4$

a) $-3 \leq x < 5 \iff x \in [-3; 5[$

b) $x > -2 \iff x \in]-2; +\infty[$

c) $x \leq 4 \iff x \in]-\infty; 4]$

2) Traduire chaque appartenance d'intervalle par une inégalité encadrant x :

- a) $x \in [-7; -1]$ b) $x \in]-\infty; 4[$

a) $x \in [-7; -1] \iff -7 \leq x \leq -1$

b) $x \in]-\infty; 4[\iff x < 4$

Exercice 3 : Intersections et réunions d'intervalles (4 points)

Compléter les égalités suivantes (le schéma n'est pas demandé mais peut être fait au brouillon) :

1. $[-3; 2] \cup]-1; 6[= [-3; 6[$

2. $[5, 3; 12] \cup]-8; 5, 3] =]-8; 12]$

3. $[-3; 2] \cap]-1; 6[=]-1; 2]$

4. $[5, 3; 12] \cap]-8; 5, 3] = \{5, 3\}$

5. $] - 2; 4] \cup]6; 8, 2] =] - 2; 4] \cup]6; 8, 2]$

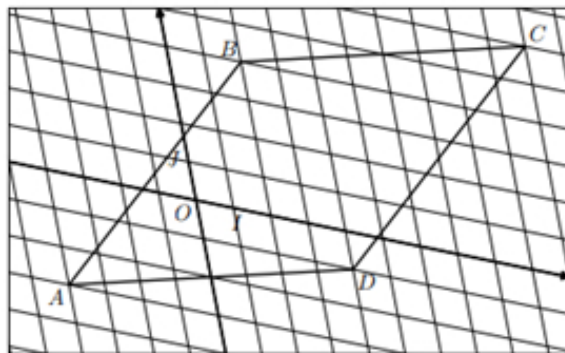
6. $] - 2; \pi] \cup]-3; -2] =] - 3; \pi]$

7. $] - 2; 4] \cap]6; 8, 2] = \emptyset$

8. $] - 2; \pi] \cap]-3; -2] = \{-2\}$

Exercice 4 : Lecture de coordonnées dans un repère (2 points)

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté au repère $(O; I, J)$. Écrire les coordonnées des points A , B , C et D .



$$A(1; 2)$$

$$B(-2; 1)$$

$$C(3; -1)$$

$$D(-1; -3)$$

Exercice 5 : Distances, milieux et quadrilatères (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On considère les points $R(6; 5)$, $S(2; -3)$ et $T(-4; 0)$.

1. Démontrer, en détaillant tous les calculs de distances nécessaires, que le triangle RST est rectangle.

Calculons les carrés des longueurs des côtés du triangle RST :

$$\begin{aligned} RS^2 &= (2 - 6)^2 + (-3 - 5)^2 = (-4)^2 + (-8)^2 = 16 + 64 = 80 \\ ST^2 &= (-4 - 2)^2 + (0 - (-3))^2 = (-6)^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45 \\ RT^2 &= (-4 - 6)^2 + (0 - 5)^2 = (-10)^2 + (-5)^2 = 100 + 25 = 125 \end{aligned}$$

On observe que $RS^2 + ST^2 = 80 + 45 = 125 = RT^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle RST est rectangle en S .

2. Calculer les coordonnées du point F , milieu du segment $[RT]$.

Les coordonnées de F sont données par : $x_F = \frac{x_R + x_T}{2} = \frac{6 + (-4)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $y_F = \frac{y_R + y_T}{2} = \frac{5 + 0}{2} = 2,5$.

Ainsi, $F(1; 2,5)$.

3. Calculer les coordonnées du point V , symétrique de S par rapport à F .

F est le milieu du segment $[SV]$, donc : $x_F = \frac{x_S + x_V}{2} \iff 1 = \frac{2 + x_V}{2} \iff x_V = 0$
 $y_F = \frac{y_S + y_V}{2} \iff 2,5 = \frac{-3 + y_V}{2} \iff y_V = 8$

Ainsi, $V(0; 8)$.

4. Déterminer la nature exacte du quadrilatère $RSTV$. Justifier soigneusement.

Les diagonales $[RT]$ et $[SV]$ ont le même milieu F . Donc $RSTV$ est un parallélogramme.

De plus, le triangle RST est rectangle en S , donc l'angle $\widehat{RST}$ est droit.

Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle. Par conséquent, $RSTV$ est un rectangle.

Exercice 6 : Exercice : Calculs sur les fractions (5 points)

Effectuer les calculs suivants et donner chaque résultat sous forme d'entier ou de fraction irréductible. Les étapes intermédiaires doivent figurer sur la copie.

$$1. A = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{5}{14}$$

$$2. B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{5}{6}$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{25}{42} = \frac{14}{42} + \frac{25}{42} = \frac{39}{42} = \frac{13}{14}$$

$$B = \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$3. C = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{17}{9} - \frac{1}{8}}$$

$$4. D = -\frac{\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{\frac{11}{8} - \frac{5}{2}}$$

$$C = \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{136}{72} - \frac{9}{72}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{127}{72}} = \frac{7}{6} \times \frac{72}{127} = \frac{84}{127}$$

$$D = -\frac{\frac{12}{2}}{\frac{11}{8} - \frac{20}{8}} = -\frac{6}{-\frac{9}{8}} = 6 \times \frac{8}{9} = \frac{16}{3}$$

$$5. E = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{6}\right)$$

$$E = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{15}{12} - \frac{14}{12}\right) = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{5}{9} - \frac{1}{18} = \frac{10}{18} - \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Exercice 7 : Bonus (2 points)

Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes vertes et le reste, soit 150 m², est occupé par la pelouse. Quel est l'aire de ce jardin ?

La fraction totale recouverte par les fleurs et les plantes vertes est :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Le reste pour la pelouse représente l'autre moitié : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Puisque cette moitié correspond à 150 m², l'aire totale du jardin est de :

$$150 \times 2 = 300 \text{ m}^2$$