

CORRIGÉ DE L'ÉVALUATION (SUJET A)

Thème : Ensembles de nombres et Fractions

Exercice 1 : Définitions et Exemples (7,5 points)

- Donner deux nombres irrationnels (1 point) :

Par exemple : π et $\sqrt{2}$.

- Donner un nombre rationnel non décimal (0,5 point) :

Par exemple : $\frac{1}{3}$ (ou $-\frac{2}{7}$).

- Donner les deux définitions d'un nombre décimal et la définition d'un nombre rationnel (6 points) :

Définitions d'un nombre décimal : 1. Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$

où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. C'est un nombre dont l'écriture décimale possède un nombre fini de chiffres après la virgule.

Définition d'un nombre rationnel : Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 2 : Appartenance et Inclusion (5 points)

Compléter avec le symbole qui convient parmi : $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$$\begin{array}{ccccccccc} -2 \in \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N} & \frac{-5}{2} \in \mathbb{D} & \mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z} & \pi \notin \mathbb{D} \\ 0,3 \in \mathbb{Q} & -0,666 \in \mathbb{R} & \sqrt{16} \in \mathbb{N} & \frac{2\pi - 6}{\pi - 3} \in \mathbb{N} & \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Exercice 3 : Vrai ou Faux (3 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant brièvement par un contre-exemple ou un argument mathématique.

- 1) Tout nombre décimal est un nombre rationnel.

Vrai : tout décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$, ce qui correspond à la définition d'un nombre rationnel.

- 2) Le nombre $\frac{22}{7}$ est un nombre irrationnel.

Faux : c'est le quotient de deux entiers (22 et 7), c'est donc un nombre rationnel.

- 3) Le nombre $\frac{1}{3}$ possède un développement décimal illimité.

Vrai : $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, son écriture décimale est infinie (périodique).

Exercice 4 : Simplification et ensembles (4 points)

Pour chacun des nombres suivants, donner une écriture simplifiée (si elle existe) puis dire à quel plus petit ensemble il appartient :

$$1. -\frac{19}{361} \\ = -\frac{1}{19} (\mathbb{Q})$$

$$2. \sqrt{49} - 2 \\ = 5 (\mathbb{N})$$

$$3. \frac{\pi + 3}{3\pi}$$

Ne se simplifie pas ($\mathbb{R}$)

$$4. \frac{\sqrt{7}}{5} \times \frac{\sqrt{7}}{5} \\ = \frac{7}{25} = 0,28 (\mathbb{D})$$

$$5. 3,3131$$

Déjà écrit ($\mathbb{D}$)

$$6. -3^2$$

$$= -9 (\mathbb{Z})$$

$$7. \frac{2^8}{14^8}$$

$$= \left(\frac{1}{7}\right)^8 (\mathbb{Q})$$

$$8. \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{5}{3} (\mathbb{Q})$$

Exercice 5 : Calculs sur les fractions (6 points)

Calculer les expressions suivantes et donner chaque résultat sous forme de fraction irréductible.

$$1) A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} \\ A = \frac{3}{4} + \frac{15}{12} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$2) B = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \div \frac{5}{6} \\ B = \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \times \frac{6}{5} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$$

$$3) C = \frac{1 + \frac{4}{3}}{\frac{10}{9}} \\ C = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{10}{9}} = \frac{7}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{7 \times 3 \times 3}{3 \times 10} = \frac{21}{10}$$

Exercice 6 : Énigme des ensembles (4 points)

Soit $E = \left\{-\frac{15}{3}; \sqrt{5}; 0,75; \pi - \pi; \frac{22}{7}; -2^3; \sqrt{16}\right\}$ (soit : $\{-5; \sqrt{5}; 0,75; 0; \frac{22}{7}; -8; 4\}$)

1) Classer chacun des éléments de l'ensemble E dans le tableau ci-dessous.

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	
0; 4	-5; -8; 0; 4	-5; -8; 0; 4; 0,75	-5; -8; 0; 4; 0,75; $\frac{22}{7}$	

2) A (décimaux mais pas entiers) et B (entiers relatifs) :

$$A = \{0,75\} \quad \text{et} \quad B = \{-5; -8; 0; 4\}$$

3) Existe-t-il un nombre de l'ensemble E qui soit à la fois irrationnel et décimal ? Justifier.

Non, car les ensembles des nombres décimaux ($\mathbb{D}$) et des nombres irrationnels

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ sont disjoints : un nombre décimal est par définition rationnel, il ne peut donc pas être irrationnel.

Exercice 7 : Exercice bonus (2 points)

Un théâtre propose des places à 15 € et d'autres places à 20 €. Recette : 8 000 € pour 470 spectateurs.

Soit x le nombre de places à 15 € et y le nombre de places à 20 €. On a le système :

$$\begin{cases} x + y = 470 \\ 15x + 20y = 8000 \end{cases} \quad \text{En substituant } y = 470 - x \text{ dans la seconde équation :}$$

$$15x + 20(470 - x) = 8000$$

$$15x + 9400 - 20x = 8000$$

$$-5x = -1400 \Rightarrow x = 280$$

Puis $y = 470 - 280 = 190$. Il y a donc **280 places à 15 €** et **190 places à 20 €**.